# Examen Final de Análisis de Variable Compleja
## Cuarto curso de Matemáticas Grupo B
## 11 de septiembre de 2003

Los ejercicios 1, 2, 3 y 4 puntúan 1,5 puntos cada uno. Los ejercicios 5 y 6 puntúan 2 puntos cada uno.

1. Sean $z, w$ números complejos distintos de cero. Dar condiciones necesarias y suficientes para que se cumplan las siguientes igualdades:

$$\textbf{a)}\ \log(zw) = \log(z) + \log(w); \quad \textbf{b)}\ \log(e^z) = z; \quad \textbf{c)}\ (z^2)^{1/2} = z.$$

2. Sean $f$ y $g$ dos funciones enteras no constantes verificando que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Justificar que existe un número complejo $\lambda$ con $|\lambda| \leqslant 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Se define

$$M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\} \quad (0 < r < 1).$$

Supóngase que hay un número natural, $n$, tal que para todo $r \in ]0,1[$ es $M(r) = r^n$, y dedúzcase que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$.

4. Hállese el número de ceros del polinomio $P(z) = z^6 - z^3 - 4z + 6$ en el semiplano de la derecha.

5. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{z^2 \log(z)}{1+z^4}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \pi/2\}, \quad (0 < \varepsilon < 1 < R)$$

calcular las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \log(x)}{1+x^4}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx.$$

6. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa verificando $f(0) = 1$ y $|\arg f(z)| < \pi/4$ para todo $z \in D(0,1)$. Pruébese que :

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

Si, además $f'(0) = 1$ entonces:

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1/2}.$$